پاسخ سوالات بخش شفاهی مسابقه متر در پایه دهم- شهریور ۱۴۰۱

پاسخ سوال ۱ قسمت الف : هر بار پرنیان سوالی می پرسد که نصف گزینه های موجود حذف شوند. مثلا سوال اول می تواند این باشد که آیا عدد در نظر گرفته شده بین ۱ تا ۱۶ هست. پاسخ چه مثبت باشد چه منفی، نیمی از گزینه ها حذف می شوند. اگر پاسخ مثبت بود، سوال دوم می تواند این باشد که آیا عدد بین ۱ تا ۸ هست. اگر پاسخ سوال اول منفی بود سوال دوم می تواند این باشد که آیا عدد مورد نظر بین ۱۷ تا ۲۴ است. و به همین ترتیب سوالات را می پرسد. چون عرفان ناچار است که در نهایت به همه پاسخ ها جواب درست بدهد، پس از ۵ سوال پرنیان می تواند به یک گزینه که همان عدد مورد نظر عرفان است برسد.

پاسخ سوال ۱ قسمت ب : فرض کنیم عددی که عرفان در نظر گرفته است n باشد.در این صورت n-1 عددی بین ۰ تا ۳۱ است و در مبنای ۲، ۵ رقم دارد. حال سوالات پرنیان می تواند به این صورت باشد: آیا اولین رقم از سمت راست عدد n-1 در مبنای ۲، صفر است؟ آیا دومین رقم سمت راست صفر است و ....

بدیهیست با این ۵ سوال، همه ی ارقام n-۱ در مبنای ۲ پیدا می شوند و پرنیان می تواند n-1 و در نتیجه n را پیدا کند.

پاسخ سوال۲ : کافیست پرنیان هر سوال بخش قبل را ۵ بار تکرار کند. از آنجایی که عرفان حداکثر ۲ بار می تواند جواب نادرست دهد پس با مقایسه ی جوابهای پنج سوال تکراری، پرنیان می تواند پاسخ صحیح را بفهمد و سپس مانند قسمت قبل، مساله حل می شود. در حقیقت اگر همه ی پنج پاسخ به یک سوال مثل هم بود یعنی عرفان به همه آن ۵ سوال جواب درست داده است. اگر ۴ تا شبیه هم بود و یکی متفاوت بود یعنی آن یک جواب متفاوت اشتباه بوده است و اگر سه جواب مثل هم و دو جواب متفاوت بود یعنی آن دو جواب، اشتباه و سه جواب مشابه، درست بوده اند.

پاسخ سوال۳ : فرض کنیم $n = \overbrace{111\ldots1}^{k}$ که $k \geq 2$ در این صورت می توان نوشت

$$n = \overbrace{111\ldots1}^{k-2} \times 100 + 11 = 4t + 3$$

که $t \in Z$. اما به سادگی دیده می شود مربع هر عدد طبیعی به شکل $4t$ یا $4t + 1$ است. پس n نمی تواند مربع کامل باشد.

پاسخ سوال۴ : طبق فرض رابطه های زیر بین جملات دنباله برقرار است

$$2a_2 = a_1 + a_3 + 2$$

$$2a_3 = a_2 + a_4 + 2$$

$$2a_4 = a_3 + a_5 + 2$$

$$2a_5 = a_4 + a_6 + 2$$

$$2a_6 = a_5 + a_7 + 2$$

از جمع این رابطه ها داریم $a_2 + a_6 = a_1 + a_7 + 10 = 1 + 13 + 10 = 24$ همچنین از جمع سه رابطه بین آنها به دست می آید $a_3 + a_5 = a_2 + a_6 + 6 = 24 + 6 = 30$ ودر نتیجه داریم $a_4 = \frac{a_3+a_5}{2} + 1 = 16$ حال به سادگی جملات دنباله به دست می آید

.... ,1,8,13,16,17,13 و بنابراین جمله پنجم دنباله ۱۷ است

پاسخ سوال ۵ :

اگر دو عدد مطلوب را x, y و واسطه های حسابی و هندسی آنها را $\overline{ba}$ و $\overline{ab}$ بنامیم داریم :

$x + y = 2\overline{ba} = 20b + 2a$ و $xy = \overline{ab}^2 = (10a + b)^2$ بنابراین داریم :

$$x(20b + 2a - x) = (10a + b)^2 \Rightarrow x^2 - 2(10b + a)x + (10a + b)^2 = 0$$

برای اینکه این معادله درجه دوم ریشه صحیح داشت باشد لازم است که دلتای معادله مربع کامل باشد، اما

$$\Delta= 4((10b + a)^2 - (10a + b)^2) = 4 \times 99(b^2 - a^2)$$

در نتیجه $b^2 - a^2 = 11$ یا $b^2 - a^2 = 44$ که نتیجه می شود $b = 6\, , a = 5$ پس

$x + y = 130\, , xy = 56^2$ واز این دو رابطه دو عدد مطلوب ۹۸ و ۳۲ به دست می آیند.

پاسخ سوال ۶ :

با توجه به تعریف دنباله حسابی داریم :

$$2(x^2 + y^2 + xy) = (y^2 + z^2 + yz) + (x^2 + z^2 + xz) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 2z^2 + xz + yz \Rightarrow (x + y)^2 - z^2 = z(x + y + z)$$

$$\Rightarrow(x + y + z)(x + y - z) = z(x + y + z) \Rightarrow (x + y + z)(x + y - 2z) = 0$$

پس $x+y+z=0$ یا $x+y=2z$ حال برای هر کدام باید ببینیم به چند صورت می توان اعداد را از مجموعه داده شده انتخاب کرد.

الف) برای محاسبه تعداد اعداد x,y,z به طوری که $x+y=2z$ می توان دو عدد زوج یا دوعدد فرد از مجموعه A انتخاب کرد. در این صورت z به صورت یکتا به دست می آید پس پاسخ این قسمت می شود

$$p(51,2)+p(50,2)=51\times 50+50\times 49=2550+2450=5000$$

ب) برای محاسبه تعداد اعداد x,y,z به طوری که $x+y+z=0$ سه حالت را در نظر می گیریم یکی اینکه یکی از این اعداد مثبت باشد و دو عدد دیگر منفی باشد و دیگر این که یکی از اعداد منفی باشد و دو عدد دیگر مثبت باشد و حالت سوم این که سه عدد شامل صفر و دو عدد قرینه باشد. در حالت اول با توجه به این که سه عدد باید متمایز باشند، اگر عدد مثبت ۳ یا ۴ باشد برای دوعدد منفی یک حالت داریم(۳و۱-و۲- یا ۴و۱-و۳-) و اگر عدد مثبت ۵ یا ۶ باشد برای دو عدد منفی دو حالت داریم (۵و۱-و۴-یا ۵و۲-و۳ی و همچنین ۶و۱-و۵- یا ۶و ۲-و۴-) و........پس در این حالت تعداد مطلوب می شود

$$(2(1+2+\cdots+24))\ \times 3!=24\times 25\times 6=3600$$

در حالت دوم هم تعداد ۳۶۰۰ و در حالت سوم ۵۰×۴=۲۰۰ می شود.(در واقع ۶ تا ۵۰ یعنی ۳۰۰ می شود ولی ۱۰۰ تاش در الف حساب شده است.) لذا جواب در حالت ب می شود ۷۴۰۰ و بنابراین پاسخ سوال ۱۲۴۰۰ می باشد.